

No.2 行列の積

この回のゴール

- 行列の積を「行 × 列」で計算でき、積が定義される型の条件を説明できる。
- Σ 記号を使って積の (i, j) 成分を書ける。
- 行列の積では $AB = BA$ が一般には成り立たないことを、例を挙げて説明できる。
- 単位行列・結合法則・分配法則・積の転置 ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$ を使いこなせる。

■ 1. 行ベクトル × 列ベクトル

No.1 の最初に出てきた連立方程式 $2x + 3y = 5$ の左辺を見てみよう。係数の並び $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$ と未知数の並び $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ から、「対応するものどうしを掛けて足す」と $2x + 3y$ ができる。これを積の出発点にする。

定義 1 行ベクトルと列ベクトルの積

成分の個数が同じ行ベクトルと列ベクトルに対し、

$$(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

と定める（結果は 1×1 行列、つまり 1 つの数と同一視する）。

高校で学んだベクトルの内積 $(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = a_1 b_1 + a_2 b_2$ と同じ形である。

■ 2. 行列の積

一般の行列の積は、「左の行列の行」と「右の行列の列」を、上の規則で次々に掛け合わせて作る。

定義 2 行列の積

$A = (a_{ij})$ を $m \times n$ 行列、 $B = (b_{ij})$ を $n \times l$ 行列とする。 $m \times l$ 行列 AB を、その (i, j) 成分が

$$(AB \text{ の } (i, j) \text{ 成分}) = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

となるように定め、 A と B の積という。つまり、 AB の (i, j) 成分 = A の第 i 行 × B の第 j 列である。

型の条件

積 AB が定義されるのは、 A の列の個数 = B の行の個数 のときだけ。

$$\underbrace{(m \times \boxed{n})}_A \underbrace{(\boxed{n} \times l)}_B \longrightarrow \underbrace{(m \times l)}_{AB}$$

内側の2つがそろっていれば掛けられて、外側の2つが積の型になる。

コラム： Σ 記号の読み方

$\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$ は「 k を1から n まで動かして $a_{ik} b_{kj}$ を全部足す」という意味。 i と j は固定されていて、動くのは k だけ。 k は左の行列では列の番号、右の行列では行の番号の位置にある。「内側の添字がそろって消える」と覚えるとよい。

例 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} (2 \times 3), B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} (3 \times 2) \text{ のとき, } AB \text{ は } 2 \times 2 \text{ 行列で}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 4 \\ (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 3 & (-1) \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

一方 BA は $(3 \times 2)(2 \times 3)$ なので 3×3 行列になり、

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 18 & 4 \end{pmatrix}.$$

AB と BA は型すら違う。

■連立方程式との関係 積を使うと、連立方程式は1本の式で書ける。

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

一般に、係数を並べた行列を A 、未知数の列ベクトルを $\mathbf{x}$ 、右辺の列ベクトルを $\mathbf{b}$ とすれば、連立一次方程式は $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ と書ける。これが第2章の出発点になる。

■ 3. 積は交換できない

数の掛け算では $ab = ba$ だったが、行列ではそうはいかない。

例 2 $AB \neq BA$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ とすると

$$AB = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

どちらも 2×2 だが, $AB \neq BA$.

例 3 O でないのに積が O

$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ とすると

$$CD = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O, \quad DC = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq O.$$

数との違いのまとめ

- AB が定義されても BA が定義されるとは限らない。両方定義されても、一般に $AB \neq BA$ 。
- $A \neq O$, $B \neq O$ でも $AB = O$ となることがある。したがって「 $AB = O$ ならば $A = O$ または $B = O$ 」は成り立たない。
- その結果, $AB = AC$ から $B = C$ と「 A で割る」ことも一般にはできない。

$AB = BA$ が成り立つとき, A と B は可換であるという。

■ 4. 単位行列

定義 3 単位行列

対角成分がすべて 1, それ以外の成分がすべて 0 である n 次正方行列を n 次単位行列といい, E_n (または単に E) で表す。

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

成分で書くと $E_n = (\delta_{ij})$. ここで δ_{ij} は

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

で定まる記号で, クロネッカーのデルタという。

本によっては単位行列を I や I_n と書く。

A が $m \times n$ 行列なら $E_m A = A$, $A E_n = A$ が成り立つ (練習問題 7). 単位行列は, 行列の掛け算における「1」の役割をする.

■ 5. 積の法則

定理 1 積の法則

以下, 積や和が定義される型の行列を考え, c を実数とする.

$$(1) (AB)C = A(BC) \quad (\text{結合法則})$$

$$(2) A(B+C) = AB+AC, \quad (A+B)C = AC+BC \quad (\text{分配法則})$$

$$(3) (cA)B = c(AB) = A(cB)$$

$$(4) {}^t(AB) = {}^tB {}^tA \quad (\text{積の転置は順番が逆})$$

【証明】(1) $A = (a_{ij})$ を $m \times n$, $B = (b_{ij})$ を $n \times p$, $C = (c_{ij})$ を $p \times q$ とする.

型: $(AB)C$ も $A(BC)$ も $m \times q$ 行列である.

成分: AB の (i, l) 成分は $\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kl}$ なので,

$$((AB)C \text{ の } (i, j) \text{ 成分}) = \sum_{l=1}^p \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kl} \right) c_{lj} = \sum_{l=1}^p \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kl}c_{lj}.$$

同様に BC の (k, j) 成分は $\sum_{l=1}^p b_{kl}c_{lj}$ なので,

$$(A(BC) \text{ の } (i, j) \text{ 成分}) = \sum_{k=1}^n a_{ik} \left(\sum_{l=1}^p b_{kl}c_{lj} \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p a_{ik}b_{kl}c_{lj}.$$

どちらも「 $a_{ik}b_{kl}c_{lj}$ を $k=1, \dots, n$, $l=1, \dots, p$ のすべての組について足したもの」で, 足す順番が違うだけなので等しい. よって $(AB)C = A(BC)$. $\square$

【証明】(4) A を $m \times n$, B を $n \times l$ とする. ${}^t(AB)$ は $l \times m$, ${}^tB {}^tA$ も $(l \times n)(n \times m)$ で $l \times m$.

$$({}^t(AB) \text{ の } (i, j) \text{ 成分}) = (AB \text{ の } (j, i) \text{ 成分}) = \sum_{k=1}^n a_{jk}b_{ki}.$$

一方, ${}^tB$ の (i, k) 成分は b_{ki} , ${}^tA$ の (k, j) 成分は a_{jk} なので

$$({}^tB {}^tA \text{ の } (i, j) \text{ 成分}) = \sum_{k=1}^n b_{ki}a_{jk}.$$

両者は等しい. $\square$

注意

(4) で順番が逆になるのは, 型を考えれば自然である. ${}^tA {}^tB$ は $(n \times m)(l \times n)$ となり, そもそも一般には掛けられない. 「靴下をはいてから靴をはく」の逆は「靴を脱いでから靴下を脱ぐ」と同じで, 逆にするときは順番も逆になる.

結合法則のおかげで, ABC のように括弧を省いて書いてよい. 特に正方行列 A については, $A^2 = AA$, $A^3 = AAA$, $\dots$ と累乗が定義でき, $A^0 = E$ と約束する.

例題 1

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき、自然数 n に対して A^n を求めよ。

【解答】 $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となるので, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と予想できる. これを数学的帰納法で示す.

$n = 1$ のときは正しい. $n = k$ で正しいと仮定すると

$$A^{k+1} = A^k A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となり $n = k + 1$ でも正しい. よって $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

■ 練習問題

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ とする. AB を計算せよ. また, BA は定義されるか.

2. $a = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ について, ab と ba をそれぞれ計算せよ.

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする.

(1) AB , BA を計算せよ.

(2) ${}^t(AB)$, ${}^tB{}^tA$, ${}^tA{}^tB$ を計算し, 定理 1 (4) を確かめよ.

4. 同じ型の正方行列 A , B について, $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ が成り立つための必要十分条件は $AB = BA$ であることを示せ.

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と可換な ($AB = BA$ を満たす) 2 次正方行列 B をすべて求めよ.

6. $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ のとき, M^n を求めよ (数学的帰納法で示すこと).

7. A を $m \times n$ 行列とする. クロネッカーのデルタを使って, $AE_n = A$ を示せ.

8. (考えてみよう) n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ の対角成分の和 $a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ を A のトレースといい, $\text{tr } A$ と書く.

(1) n 次正方行列 A , B について $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ を示せ.

(2) $AB - BA = E_n$ となる n 次正方行列 A , B は存在しないことを示せ.

■ 練習問題の解答

1. $AB = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 14 \end{pmatrix}$. BA は $(2 \times 3)(2 \times 2)$ で, B の列の個数 3 と A の行の個数 2 が違うので定義されない.

2. $ab = 2 - 2 - 3 = -3$ (1×1). $ba = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ (3×3). 順番を変えるだけで型がまったく違う.

3. (1) $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. (B を右から掛けると列が入れ替わり, 左から掛けると行が入れ替わる.)

(2) ${}^t(AB) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, ${}^tB{}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, ${}^tA{}^tB = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA \neq {}^tA{}^tB$ である.

4. 分配法則より $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$. これが $A^2 + 2AB + B^2$ に等しいことは $AB + BA = 2AB$, すなわち $BA = AB$ と同値.

5. $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと

$$AB = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}.$$

成分を比べて $c = 0$, $d = a$. よって $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ (a, b は任意の実数).

6. $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $M^3 = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ などから $M^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ と予想する. $n = 1$ では正しい. $n = k$ で正しいとすると

$$M^{k+1} = \begin{pmatrix} 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{k+1} & 2^k + k2^k \\ 0 & 2^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{k+1} & (k+1)2^k \\ 0 & 2^{k+1} \end{pmatrix}$$

で, $n = k+1$ でも正しい.

7. AE_n は $m \times n$ で A と型が同じ. その (i, j) 成分は $\sum_{k=1}^n a_{ik}\delta_{kj}$. δ_{kj} は $k = j$ のときだけ 1 で他は 0 なので, 和に残るのは $k = j$ の項 a_{ij} だけ. よって $AE_n = A$.

8. (1) $\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki}$, $\text{tr}(BA) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ki}a_{ik}$. 足しているものの全体が同じなので等しい.

(2) $AB - BA = E_n$ と仮定する. トレースは和について $\text{tr}(X+Y) = \text{tr} X + \text{tr} Y$ を満たすので, (1) より左辺のトレースは $\text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = 0$. 一方 $\text{tr} E_n = n \neq 0$. 矛盾.